بهینه سازی
مبانی بهینه سازی نامقید

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

مشتق

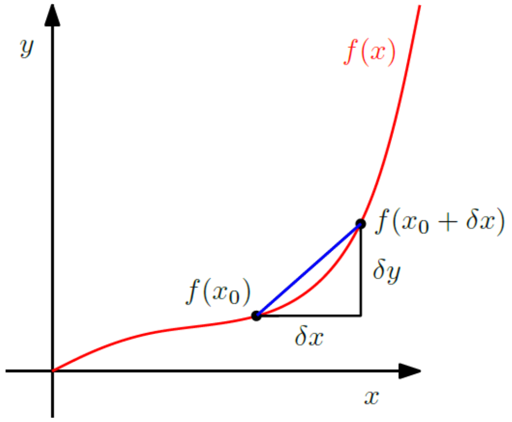
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- مشتق مرتبهٔ اول

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

- مشتق مرتبهٔ دوم

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = f''(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f'(x+\epsilon) - f'(x)}{\epsilon}$$



قواعد

- قاعدهٔ جمع

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

- قاعدهٔ ضرب

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- قاعدهٔ زنجیری

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)\,)f'(x)$$

- قاعده خارج‌قسمت

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

پیدار تیلور

نمایش تابع مبتنی بر جمع تعداد نامتناهی از مشتق‌ها

- ارزیابی راحت
- مشتق‌پذیری

تعریف چندجمله‌ای تیلور

چندجمله‌ای تیلور درجه n از تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\cdots$$

پیدار تیلور

نمایش تابع مبتنی بر جمع تعداد نامتناهی از مشتق‌ها

تعریف چندجمله‌ای تیلور

چندجمله‌ای تیلور درجه **n** از تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ در x_0 عبارت است از

$f^{(k)}(x_0)$ مشتق **k**-اُم تابع **f** در نقطه x_0

$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ ضرائب چندجمله‌ای

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$=f(x_0)+f^{(1)}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{6}(x-x_0)^3+\cdots$$

پیدار تیلور- ادامه

پیدار مک‌لورن

- مورد خاصی از پیدار تیلور
- $x_0 = 0$

چندجمله‌ای تیلور درجه n تقریبی از تابع f

- امکان چندجمله‌ای نبودن تابع f

شباهت تقریب تیلور در همسایگی x_0 به تابع f

پیدار تیلور- مثال

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \in C^{\infty}$$

بسط تیلور حول نقطهٔ $x_0 = 0$

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 1$$
$$f'(0) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$

پیدار تیلور- مثال

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \in C^{\infty}$$

بسط تیلور حول نقطهٔ $x_0 = 0$

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 1$$
$$f'(0) = \cos(0) - \sin(0) = 1$$
$$f''(0) = -\sin(0) - \cos(0) = -1$$
$$f^{(3)}(0) = -\cos(0) + \sin(0) = -1$$
$$f^{(4)}(0) = \sin(0) + \cos(0) = f(0) = 1$$

به‌نظر دارای الگو: $f^{(k+4)}(0) = f^{(k)}(0)$

پس بسط پیدار تیلور f در نقطهٔ $x_0 = 0$

پیدار تیلور- مثال - ادامه

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \in \mathcal{C}^{\infty}$$

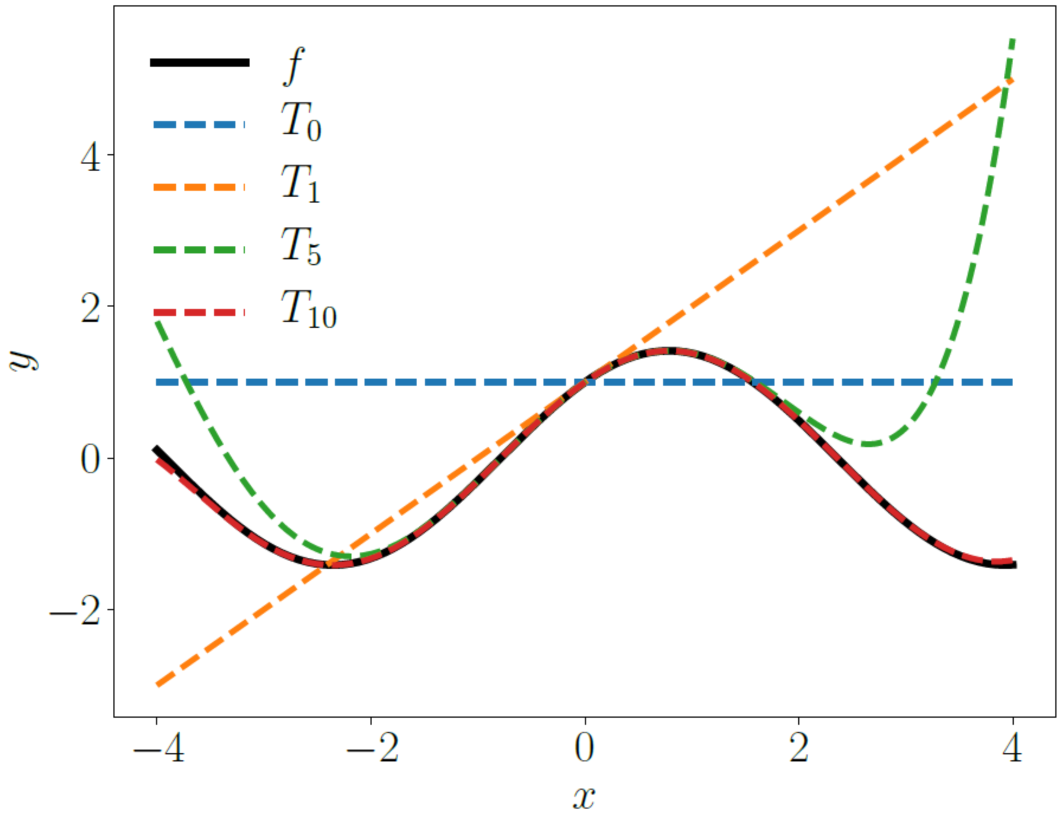
بسط تیلور حول نقطهٔ $x_0 = 0$

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = 1, \qquad f''(0) = -1, \qquad f^{(3)}(0) = -1, \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

پس بسط پیدار تیلور f در نقطهٔ $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} T_{\infty}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \mp \cdots\right) + \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 \mp \cdots\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!}x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1} \\ &= \cos(x) + \sin(x) \end{aligned}$$

پیدار تیلور- مثال - ادامه



پیدار تیلور- ادامه

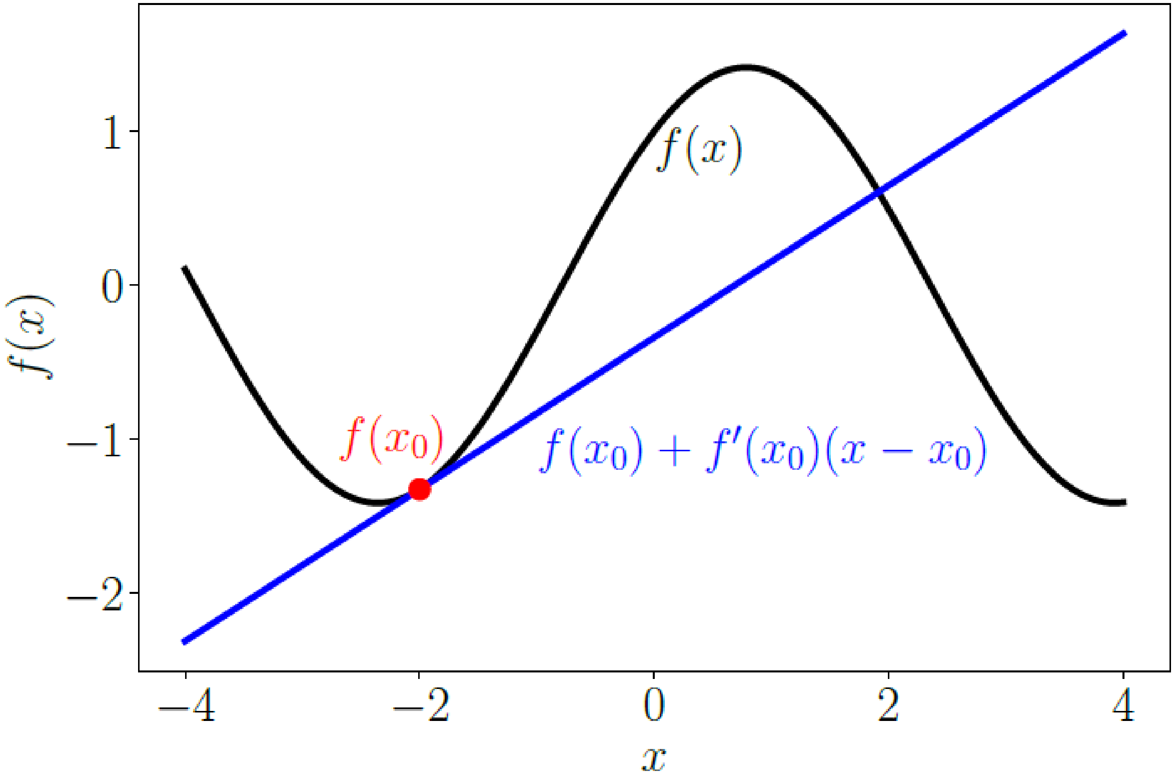
پیدار تیلور نمونهٔ خاصی از پیدارهای توانی

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-c)^k$$

a_k ضرائب

c ثبات

پیدار تیلور - تقریب



$$f(\boldsymbol{x}) \approx f(\boldsymbol{x_0}) + \nabla_x f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0})$$

مشتق تابع چند متغیره – گرادیان

مشتق‌پذیری درجه اول

پیوستگی

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x})$$
$$\boldsymbol{x} = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)^T$$

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_۱} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \underset{\epsilon \to \infty}{\text{حد}} \frac{f(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_i + \epsilon, x_{i+۱}, \ldots, x_n) - f(x_۱, \ldots, x_{i-۱}, x_i, x_{i+۱}, \ldots, x_n)}{\epsilon}$$
$$= \underset{\epsilon \to \infty}{\text{حد}} \frac{f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{e_i}) - f(\boldsymbol{x})}{\epsilon}$$

قاعده زنجیری

$f\colon \mathbb{R}^{۲} \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} = (x_{۱}, x_{۲})^T$

$x_۱$ و $x_۲$ هر دو تابعی از t

گرادیان f نسبت به t:

$$\frac{df}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_۱} & \frac{\partial f}{\partial x_۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_۱(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_۲(t)}{\partial t} \end{bmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_۱} \frac{\partial x_۱(t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_۲} \frac{\partial x_۲(t)}{\partial t}$$

قاعده زنجیری - ادامه

$$f(x_۱, x_۲) = x_۱^۲ + ۲x_۲$$
$$x_۱ = sint$$
$$x_۲ = \cos t$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_۱}\frac{dx_۱}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_۲}\frac{dx_۲}{dt}$$
$$= ۲\sin t cos\, t - ۲\sin t$$

قاعده زنجیری - ادامه

$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$

اگر x_1 و x_2 هر دو تابعی از دو متغیر t و s

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(s,t)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2(s,t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial (s,t)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial x_1(s,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x_2(s,t)}{\partial s} & \frac{\partial x_2(s,t)}{\partial t} \end{bmatrix}$$

ویژگی‌های مفید جهت محاسبهٔ گرادیان

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^\top = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)^\top$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \mathrm{tr}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})) = \mathrm{tr}\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \det(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})) = \det(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}))\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X})^{-1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{X}} = -(\boldsymbol{X}^{-1})^\top \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top (\boldsymbol{X}^{-1})^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{a}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{a}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{X}\boldsymbol{b}}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\top$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^\top(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^\top)$$

$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) = -2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s})^\top \boldsymbol{W}\boldsymbol{A}$$

W متقارن:

مشتق تابع چند متغیره- ماتریس هسی

مشتق دوم

ماتریس هسی

مشتق‌پذیری مرتبه دوم

$$\nabla^۲ f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^۲ f}{\partial {x_۱}^۲} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱ \partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱ \partial x_n} \\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲ \partial x_۱} & \frac{\partial^۲ f}{\partial {x_۲}^۲} & \cdots & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲ \partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x_n \partial x_۱} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_n \partial x_۲} & \cdots & \frac{\partial^۲ f}{\partial {x_n}^۲} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x_j \partial x_i}$$

پیدار تیلور چندمتغیره

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}), \;\; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

هموار در همسایگی $\boldsymbol{x}_0$

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$

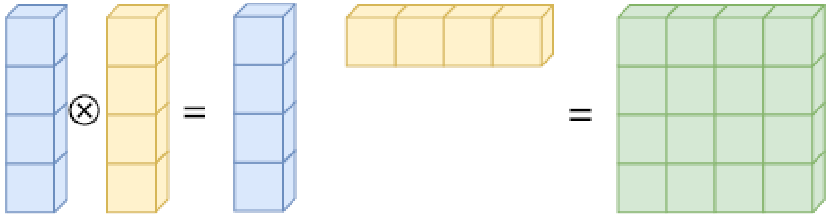
$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ مشتق k-اُم f نسبت به $\boldsymbol{x}$

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!} \boldsymbol{\delta}^k$$

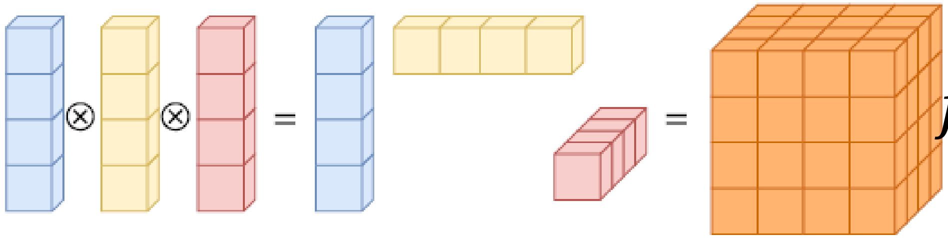
$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ و $\boldsymbol{\delta}^k$ هر دو تنسور درجهٔ k-اُم

پیدار تیلور چندمتغیره

$\boldsymbol{\delta}^2 := \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^\top , \quad \boldsymbol{\delta}^2[i,j] = \delta[i]\delta[j]$



$\boldsymbol{\delta}^3 := \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} , \quad \boldsymbol{\delta}^3[i,j,k] = \delta[i]\delta[j]\delta[k]$



$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\boldsymbol{x} \to f(\boldsymbol{x}), \ \ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

هموار در همسایگی $\boldsymbol{x}_0$

$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$

$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ مشتق k-اُم f نسبت به $\boldsymbol{x}$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)}{k!} \boldsymbol{\delta}^k$$

$D_{\boldsymbol{x}}^k f(\boldsymbol{x}_0)$ و $\boldsymbol{\delta}^k$ هر دو تنسور درجهٔ k-اُم

پیدار تیلور چندمتغیره

$$D_{\boldsymbol{x}}^{k}\, f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{k} = \sum_{i_1}^{D} \dots \sum_{i_k}^{D} D_{\boldsymbol{x}}^{k}\, f(\boldsymbol{x}_0)[i_1, \dots, i_k]\, \delta[i_1] \dots \delta[i_k]$$

$$k = 0 : D_{\boldsymbol{x}}^{0} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{0} = f(\boldsymbol{x}_0) \in \mathbb{R}$$

$$k = 1 : D_{\boldsymbol{x}}^{1} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{1} = \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0)}_{1\times D} \underbrace{\boldsymbol{\delta}}_{D\times 1} = \sum_{i=1}^{D} \nabla_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}_0)[i]\delta[i] \in \mathbb{R}$$

$$k = 2 : D_{\boldsymbol{x}}^{2} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{2} = \operatorname{tr}\big(\underbrace{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)}_{D\times D} \underbrace{\boldsymbol{\delta}}_{D\times 1} \underbrace{\boldsymbol{\delta}^{\top}}_{1\times D}\big) = \boldsymbol{\delta}^{\top}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}$$

$$= \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} H[i, j]\delta[i]\delta[j] \in \mathbb{R}$$

$$k = 3 : D_{\boldsymbol{x}}^{3} f(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{\delta}^{3} = \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} \sum_{k=1}^{D} D_{\boldsymbol{x}}^{3} f(\boldsymbol{x}_0)[i, j, k]\delta[i]\delta[j]\delta[k] \in \mathbb{R}$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x_۱, x_۲) = {x_۱}^۲ + ۲x_۱x_۲ + {x_۲}^۳$

$\boldsymbol{x}_0 = (۱, ۲)$

$f(۱, ۲) = ۱۳$

$\frac{\partial f}{\partial x_۱} = ۲x_۱ + ۲x_۲ = ۶$

$\frac{\partial f}{\partial x_۲} = ۲x_۱ + ۳x_۲^۲ = ۱۴$

$D^۱_{x_۱, x_۲} f(\boldsymbol{x}_0) = \nabla_{x,y} f(\boldsymbol{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_۱} & \frac{\partial f}{\partial x_۲} \end{bmatrix} = [۶ \quad ۱۴] \in \mathbb{R}^{۱\times۲}$

$\frac{D^۱_{x_۱, x_۲} f(\boldsymbol{x}_0)}{۱!} \boldsymbol{\delta} = [۶ \quad ۱۴] \begin{bmatrix} x_۱ - ۱ \\ x_۲ - ۲ \end{bmatrix} = ۶(x_۱ - ۱) + ۱۴(x_۲ - ۲)$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x_۱, x_۲) = x_۱{}^۲ + ۲x_۱x_۲ + x_۲{}^۳$

$\boldsymbol{x}_0 = (۱, ۲)$

$f(۱, ۲) = ۱۳$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱{}^۲} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۱ \partial x_۲} \\ \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲ \partial x_۱} & \frac{\partial^۲ f}{\partial x_۲{}^۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۶x_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱۲ \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۲\times۲}$$

$$\frac{D^۲_{x_۱, x_۲} f(\boldsymbol{x}_0)}{۲!} \boldsymbol{\delta}^۲ = \frac{۱}{۲} \boldsymbol{\delta}^T H \boldsymbol{\delta}$$

$$= \frac{۱}{۲} [x_۱ - ۱ \quad x_۲ - ۲] \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ - ۱ \\ x_۲ - ۲ \end{bmatrix}$$

$$= (x_۱ - ۱)^۲ + ۲(x_۱ - ۱)(x_۲ - ۲) + ۶(x_۲ - ۲)^۲$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x_۱, x_۲) = x_۱{}^۲ + ۲x_۱x_۲ + x_۲{}^۳$

$\boldsymbol{x}_0 = (۱, ۲)$

$f(۱, ۲) = ۱۳$

$$D^۳_{x_۱, x_۲} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial x_۱} & \frac{\partial H}{\partial x_۲} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{۲\times۲\times۲}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_۱} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱{}^۳} & \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱^۲ \partial x_۲} \\ \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱ \partial x_۲ \partial x_۱} & \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱ \partial x_۲{}^۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_۲} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱{}^۳} & \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱^۲ \partial x_۲} \\ \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱ \partial x_۲ \partial x_۱} & \frac{\partial^۳ f}{\partial x_۱ \partial x_۲{}^۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ۶ \end{bmatrix}$$

$$\frac{D^۳_{x_۱, x_۲} f(\boldsymbol{x}_0)}{۳!} \boldsymbol{\delta}^۳ = (x_۲ - ۲)^۳$$

پیدار تیلور چندمتغیره - مثال

$f(x_۱, x_۲) = x_۱{}^۲ + ۲x_۱x_۲ + x_۱x_۲{}^۳$

$\boldsymbol{x}_0 = (۱, ۲)$

$f(۱, ۲) = ۱۳$

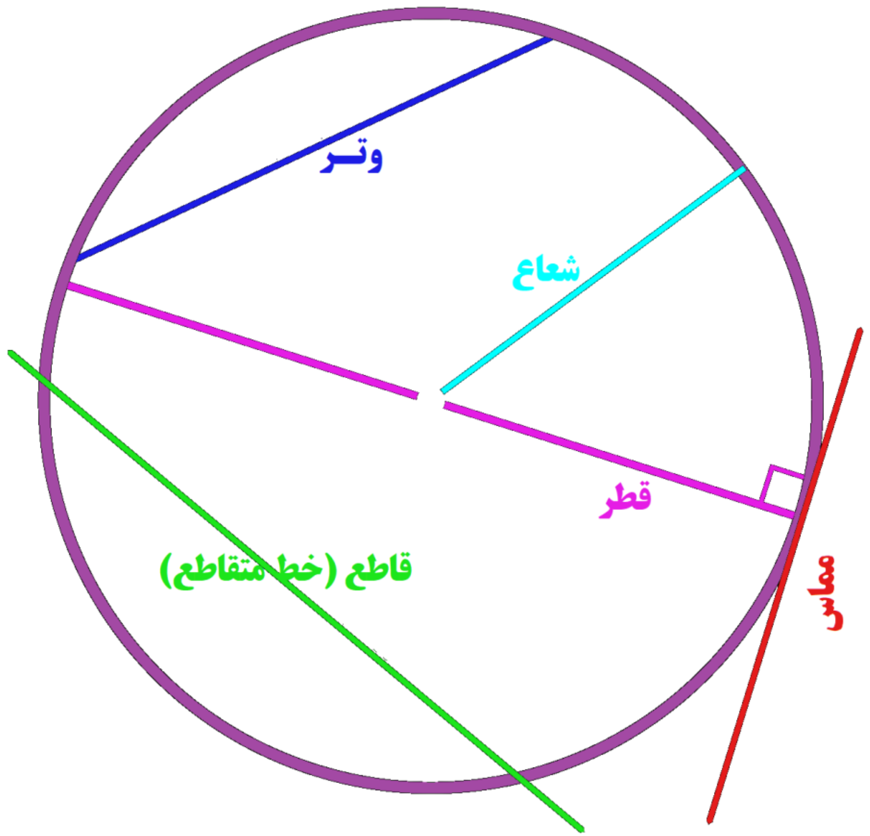
$f(x) = ۱۳ + ۶(x_۱ - ۱) + ۱۴(x_۲ - ۲) + (x_۱ - ۱)^۲ + ۲(x_۱ - ۱)(x_۲ - ۲) + ۶(x_۲ - ۲)^۲ + (x_۲ - ۲)^۳$

خط مماس بر منحنی

خط مماس بر خم صفحه‌ای در نقطهٔ معین

صرفا لمس منحنی در آن نقطه

نسبت خط و دایره

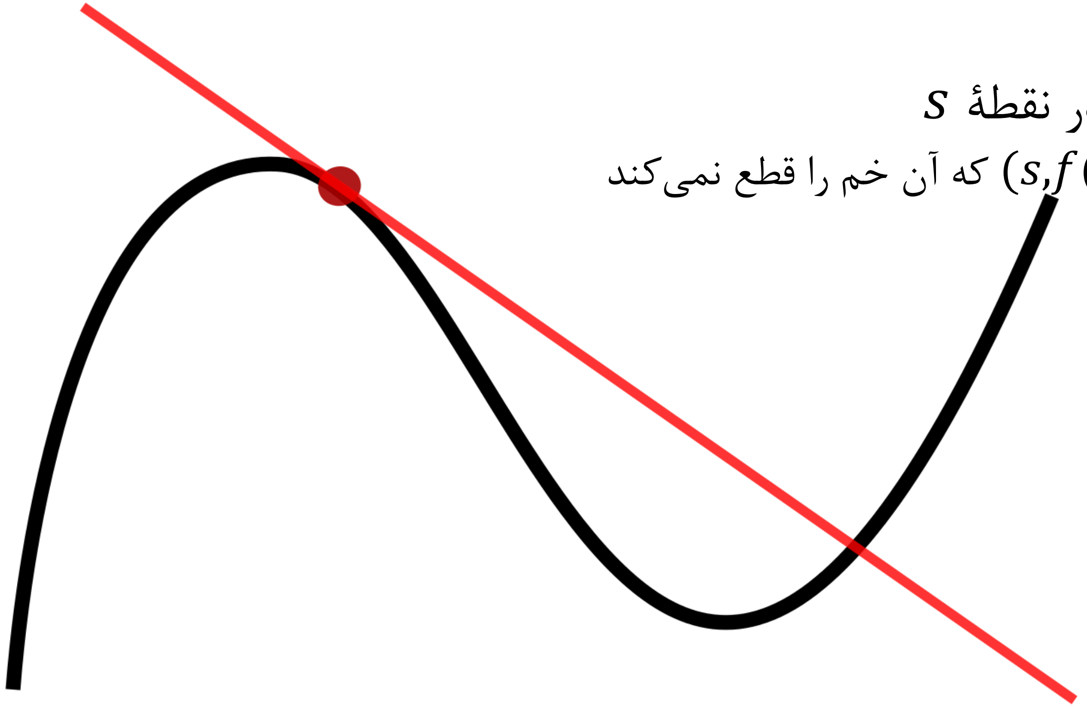


مماس در تابع تک متغیره

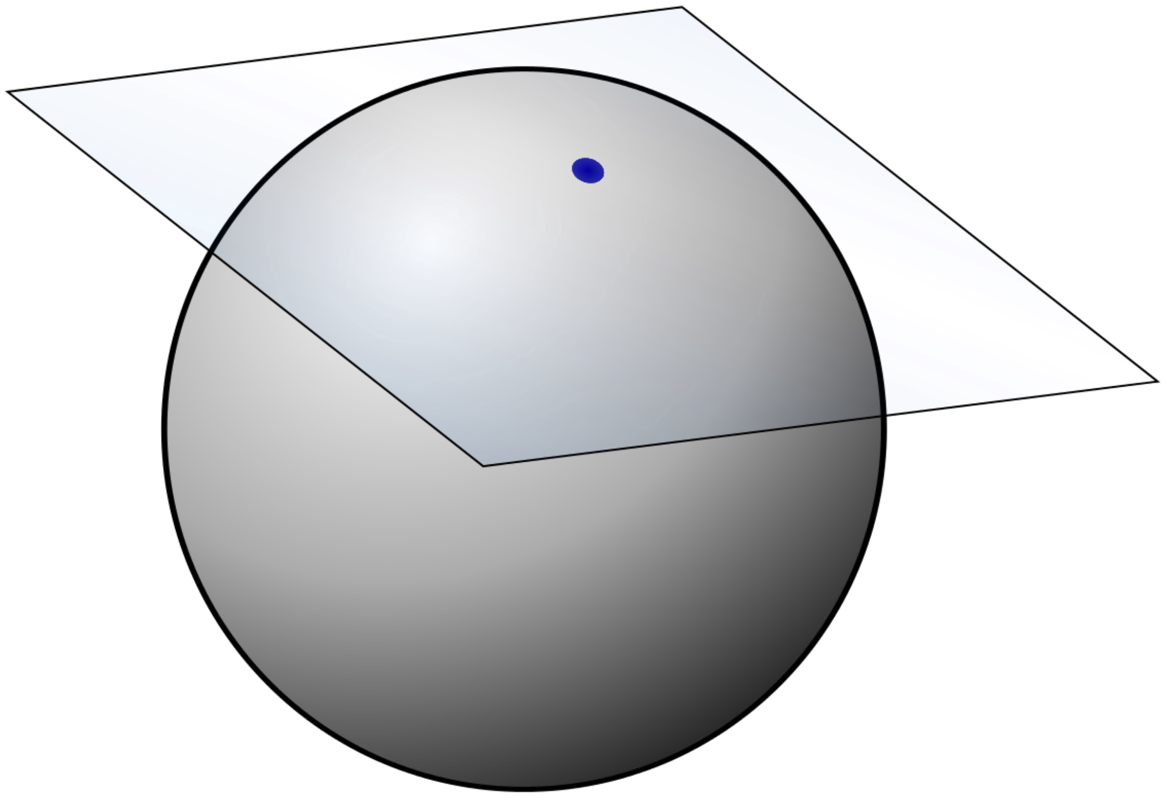
$y = f(x)$

فرض مماس بر منحنی در نقطهٔ s

- خط راست گذرنده از $(s, f(s))$ که آن خم را قطع نمی‌کند
- شیبی برابر $f'(s)$
  - f' مشتق f

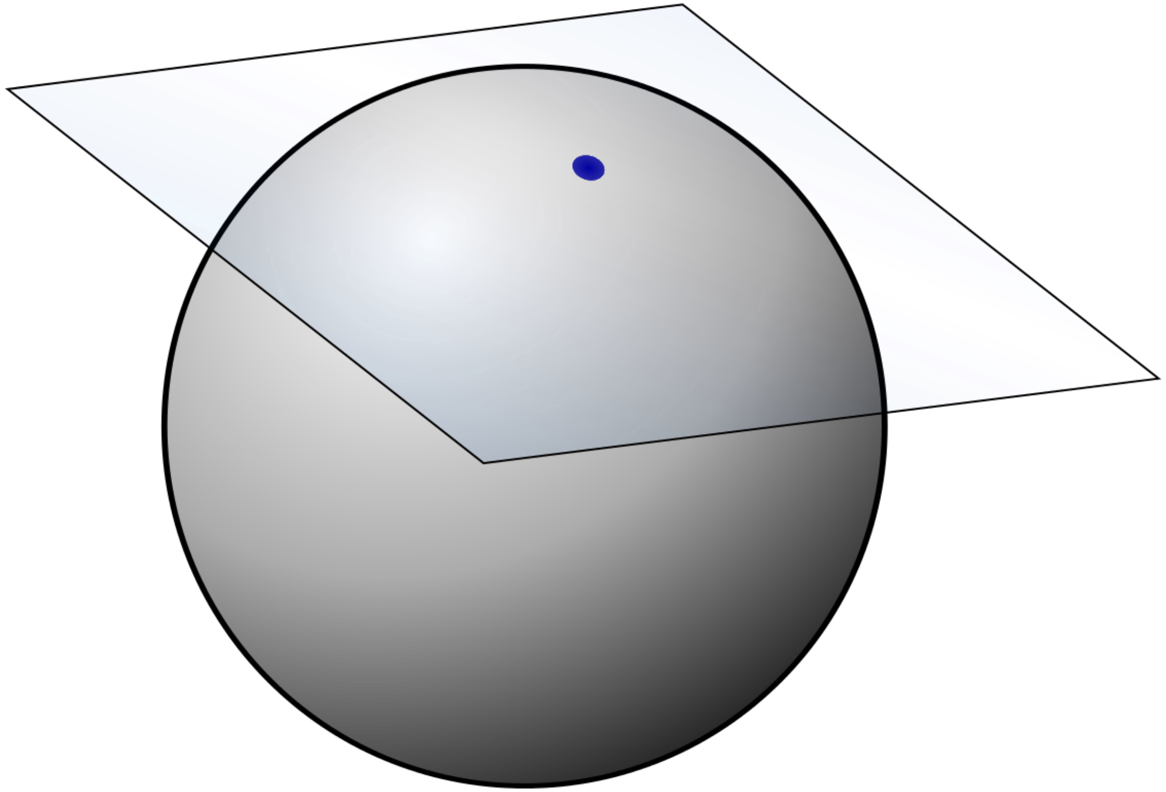


مماس در تابع دو متغیره

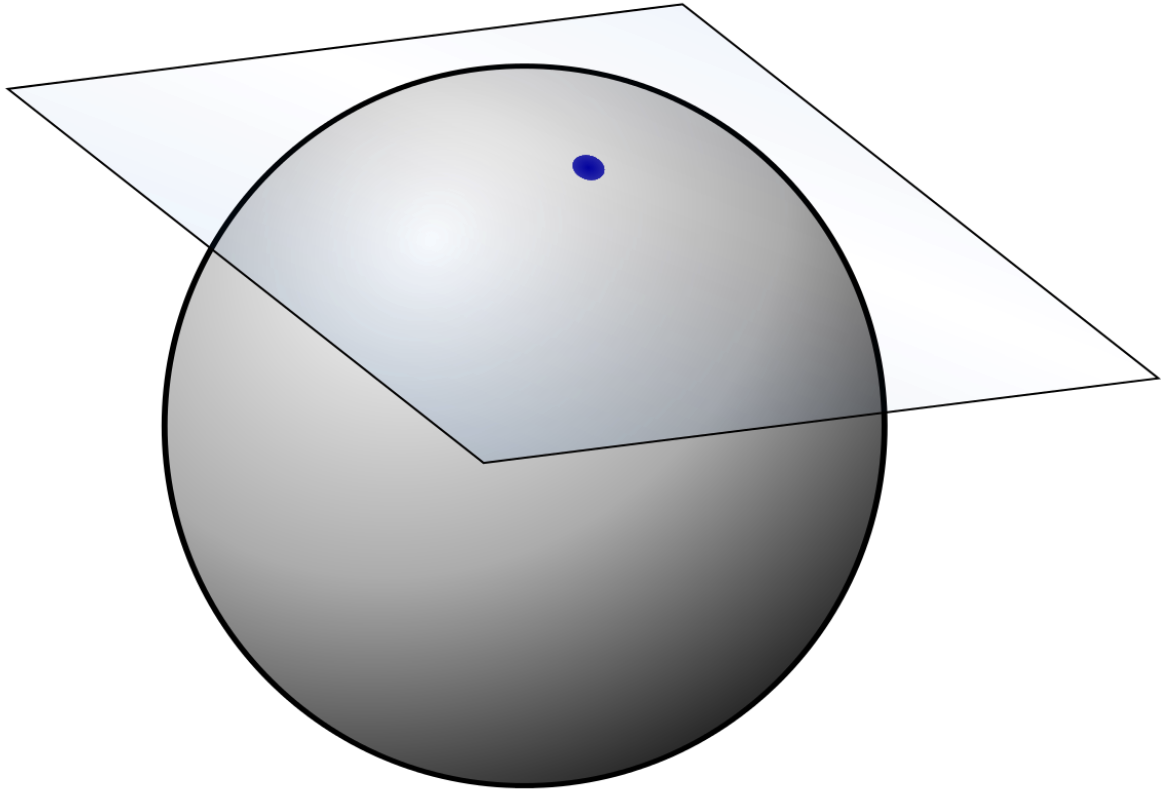


مماس در تابع دو متغیره

صفحه مماس بر نقطهٔ خاص



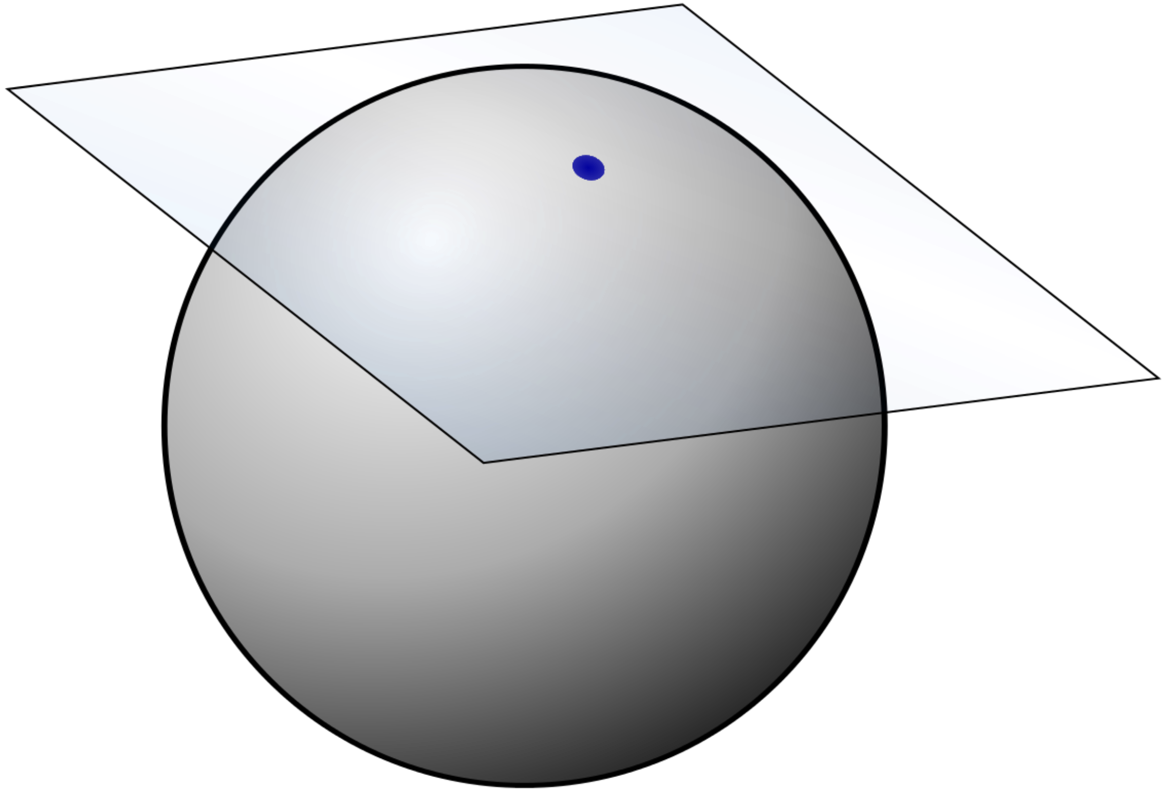
مماس در تابع دو متغیره



صفحه مماس بر نقطهٔ خاص

چند خط مماس بر هر نقطه؟

مماس در تابع دو متغیره

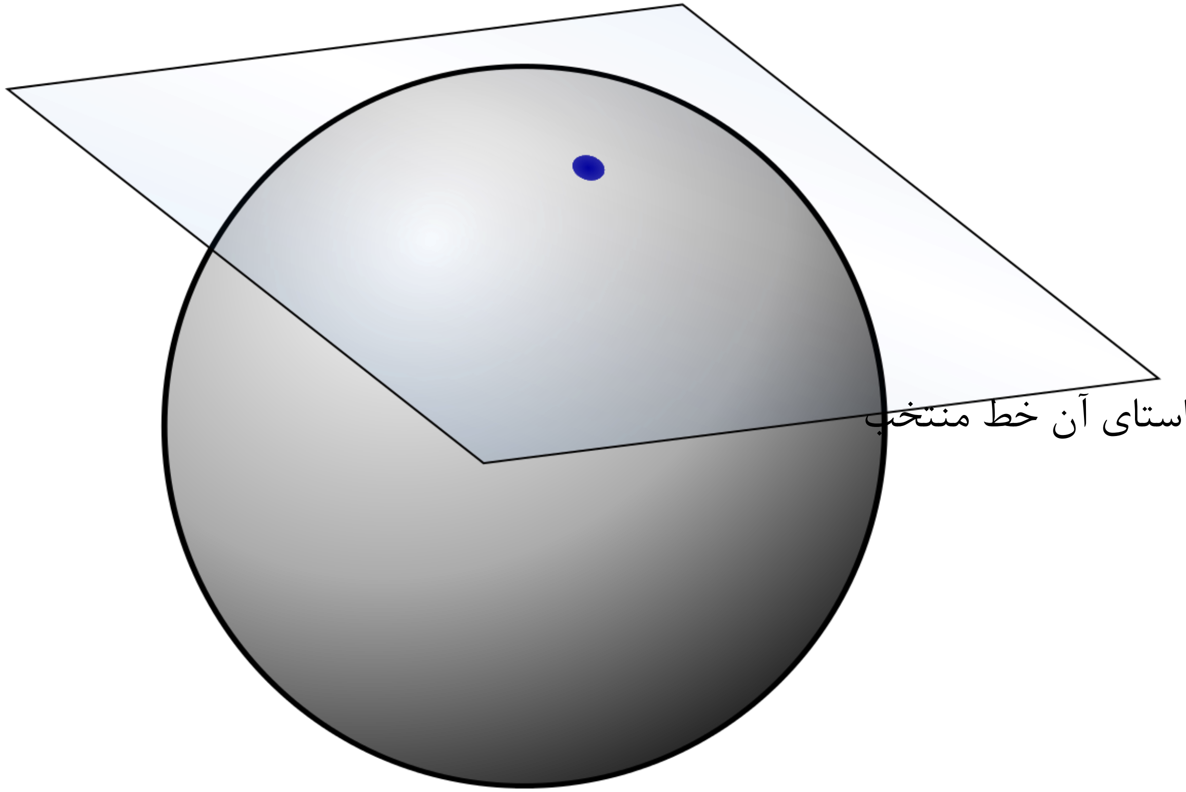


صفحه مماس بر نقطهٔ خاص

چند خط مماس بر هر نقطه؟

- بی‌نهایت

مماس در تابع دو متغیره



صفحه مماس بر نقطهٔ خاص

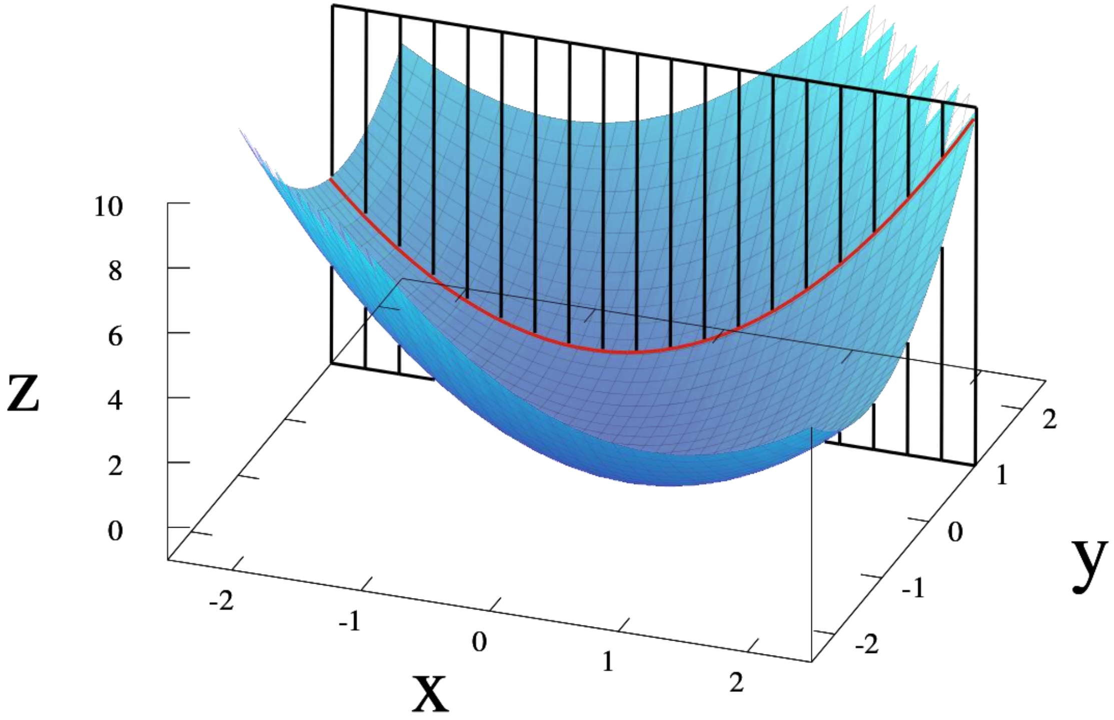
چند خط مماس بر هر نقطه؟

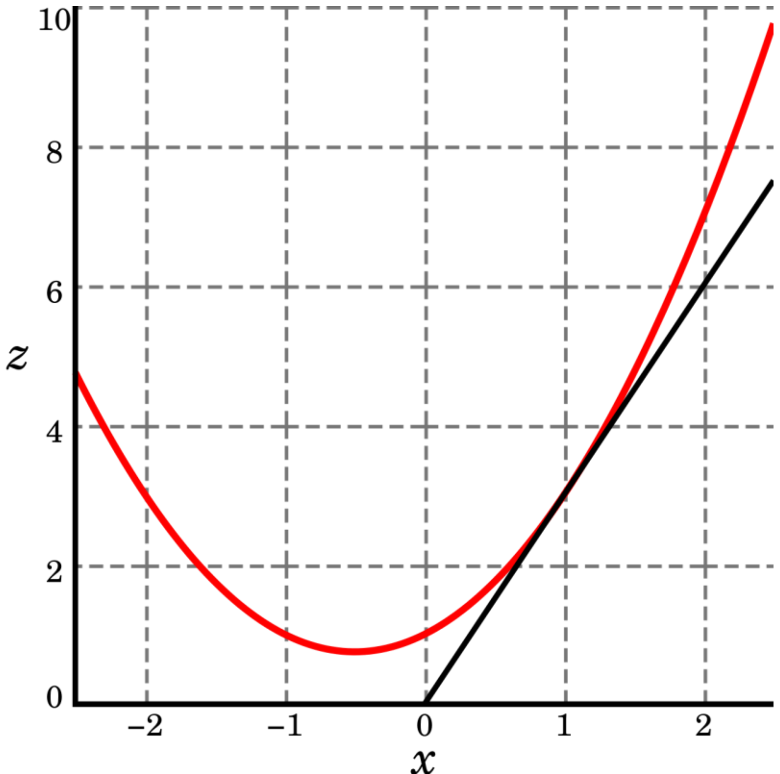
- بی‌نهایت

مشتق جزئی

- انتخاب یکی از این خطوط و یافتن شیب در راستای آن خط منتخب

$$z = x^۲ + xy + y^۲$$





مشتق‌های جهت‌دار

مشتق: اندازه‌گیری حساسیت به تغییرِ مقدار تابع با توجه به تغییر ورودی

مشتق‌های جهت‌دار: سرعت لحظه‌ای تغییرات تابع در راستای بردار $\boldsymbol{p}$ در نقطه $\boldsymbol{x}$

تعمیم مشتق‌های جزیی

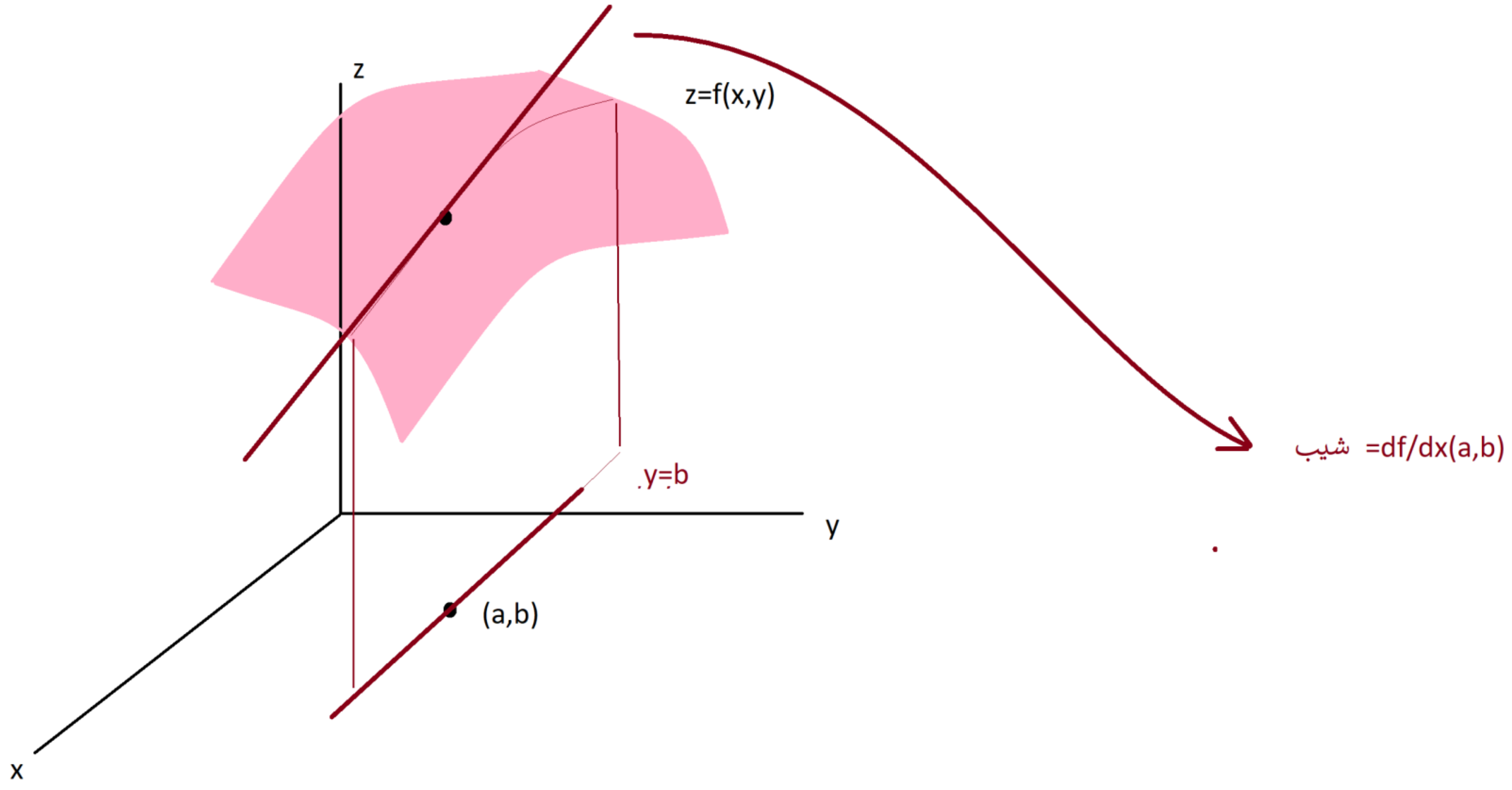
- مشتق‌های جهت‌دار در راستای هر محور
- نمایش با بردارها
  - بردار واحد
- روی صفحه (ابرصفحهٔ) متغیرها

مشتق‌های جهت‌دار

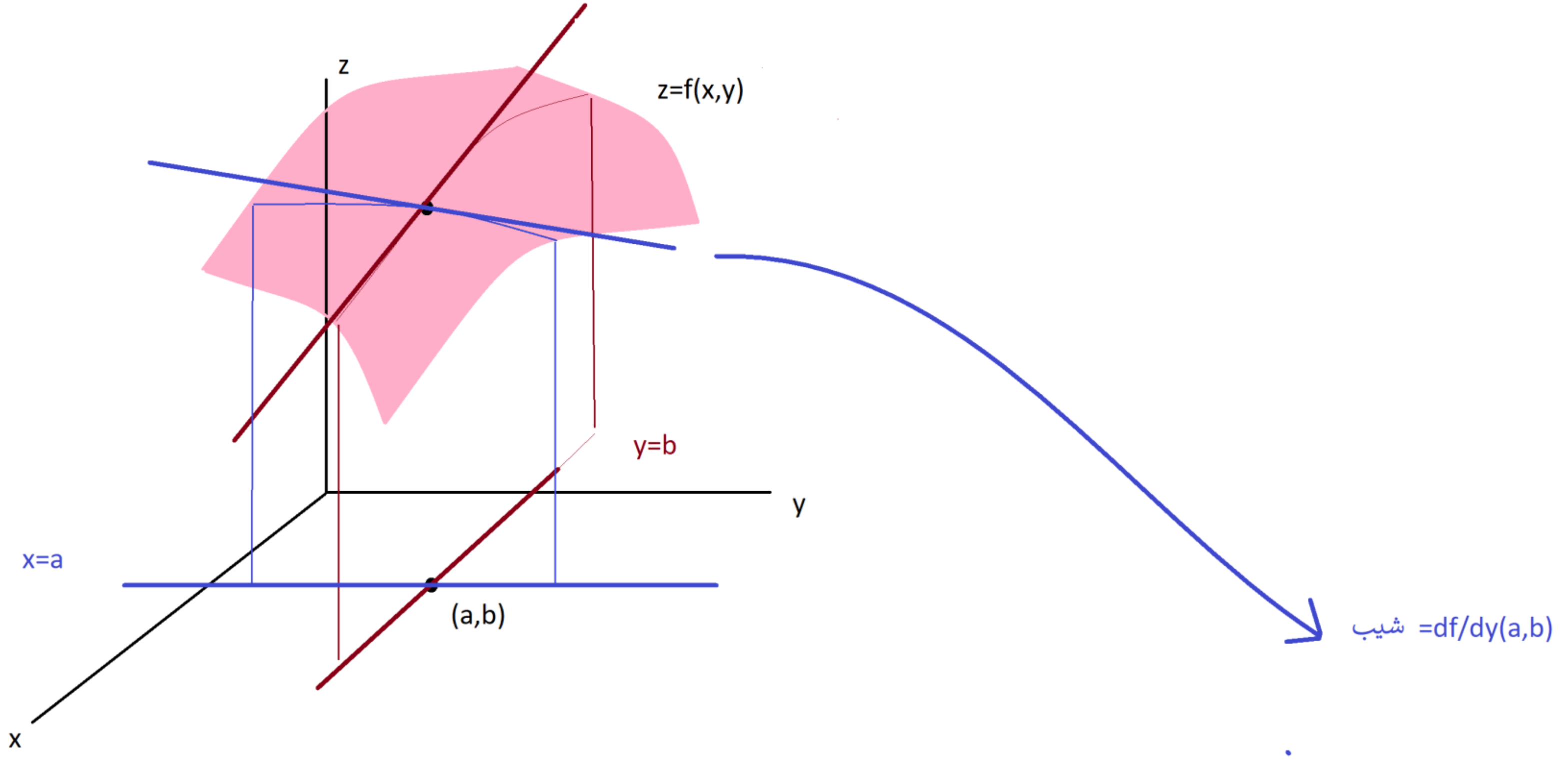
$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
$\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^n$
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$D(f(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{p}) - f(\boldsymbol{x})}{\epsilon}$$

گرادیان و مشتق جهت‌دار



گرادیان و مشتق جهت‌دار



گرادیان و مشتق جهت‌دار

$\boldsymbol{p} = (p_0, p_۱)$

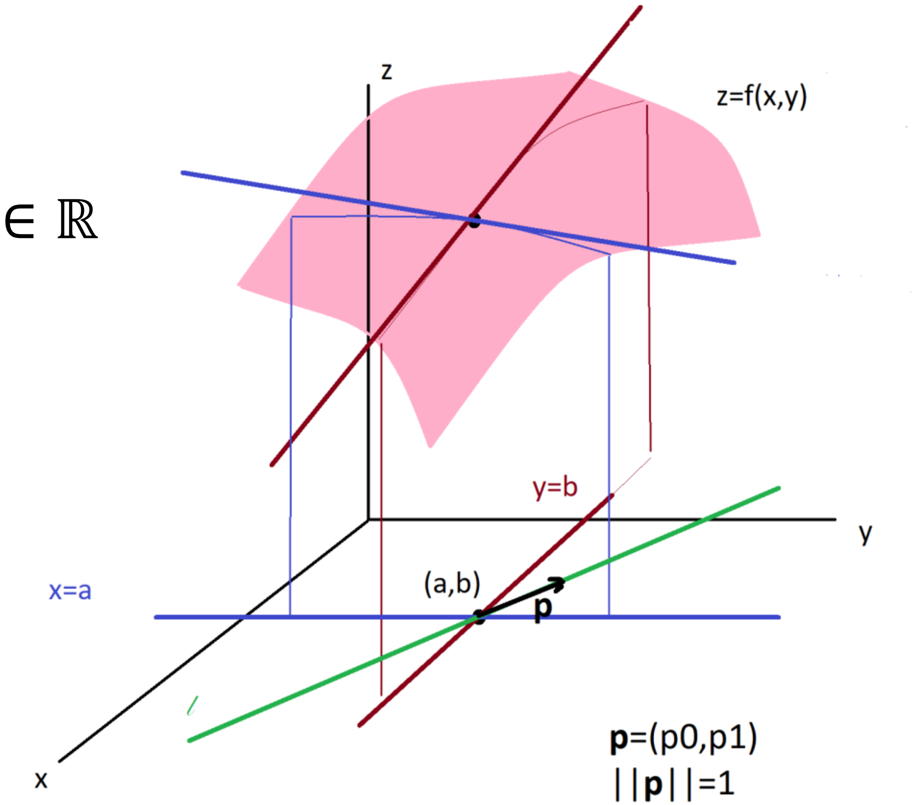
$\|\boldsymbol{p}\| = ۱$

$l = (a + p_0 t, b + p_۱ t), t \in \mathbb{R}$

$x = a + p_0 t$

$y = b + p_۱ t$

$t = \frac{x-a}{p_0} \Longrightarrow y = mx + c$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

$$f(a+p_0t, b+p_{١}t) \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = a + p_0 t \\ y = b + p_{١} t \end{Bmatrix} \Leftrightarrow t$$

$$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \frac{df}{dt}\Big|_{t=0}$$

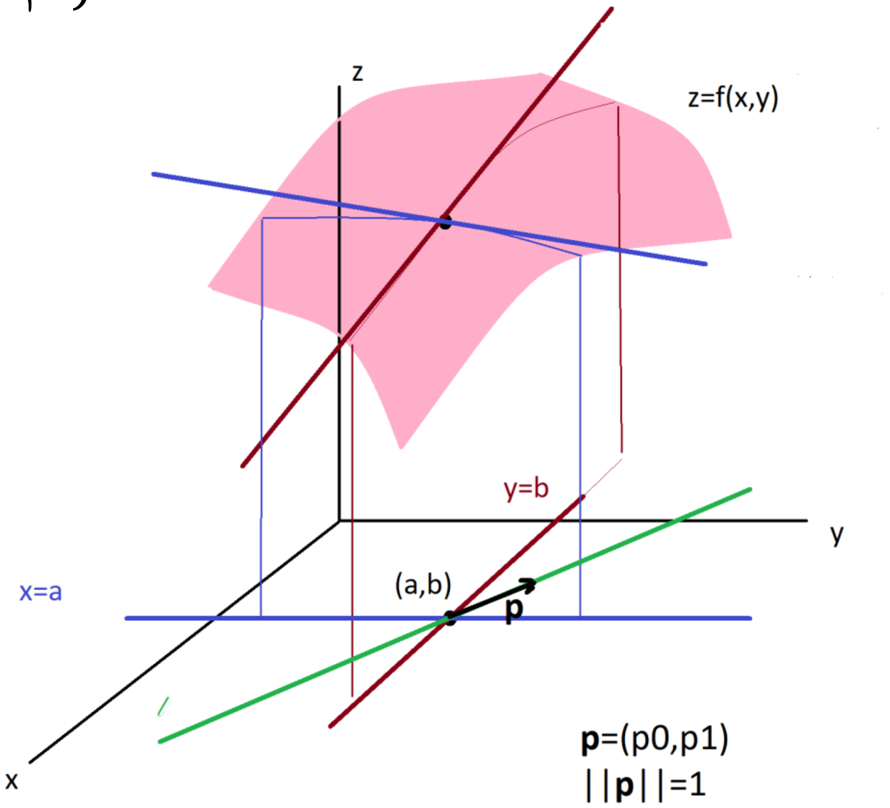
استفاده از قاعدهٔ زنجیری

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} p_0 + \frac{\partial f}{\partial y} p_{١}$$

$$= (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}).(p_0, p_{١})$$

$$= \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

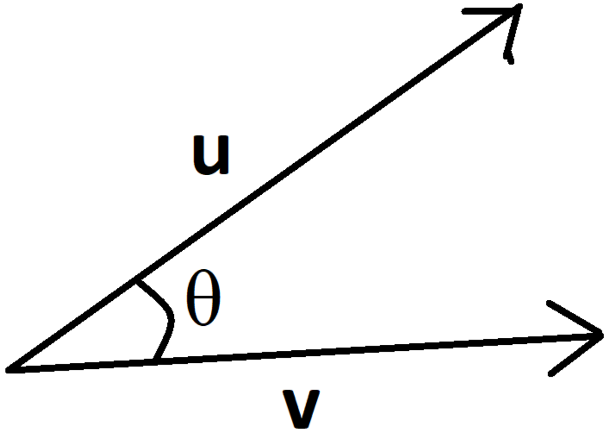
$$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$$

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$$

گرادیان و مشتق جهت‌دار

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|cos\theta$

ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم برابر صفر



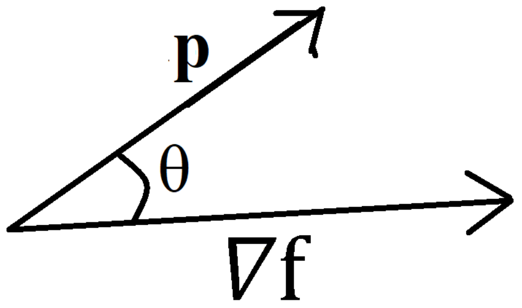
گرادیان و مشتق جهت‌دار

$D(f(a,b);\boldsymbol{p}) = \nabla f(a,b).\boldsymbol{p}$

$= \|\nabla f\|\|\boldsymbol{p}\|cos\theta$

$= \|\nabla f\|cos\theta$

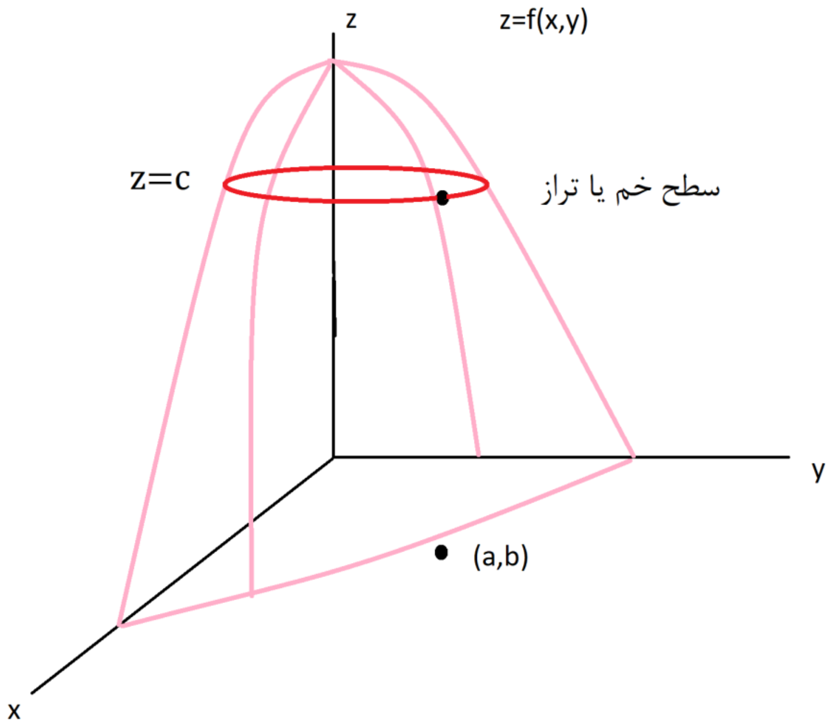
$-۱ \leq cos\theta \leq ۱$



$cos\theta = ۱ \Longrightarrow D(f;\boldsymbol{p})_{\text{بیشینه اندازه}} = \|\nabla f\|$

$cos\theta = -۱ \Longrightarrow D(f;\boldsymbol{p})_{\text{کمینه اندازه}} = -\|\nabla f\|$

گرادیان و مشتق جهت‌دار



جهت بیشترین نزول

- در راستای $-\nabla f$

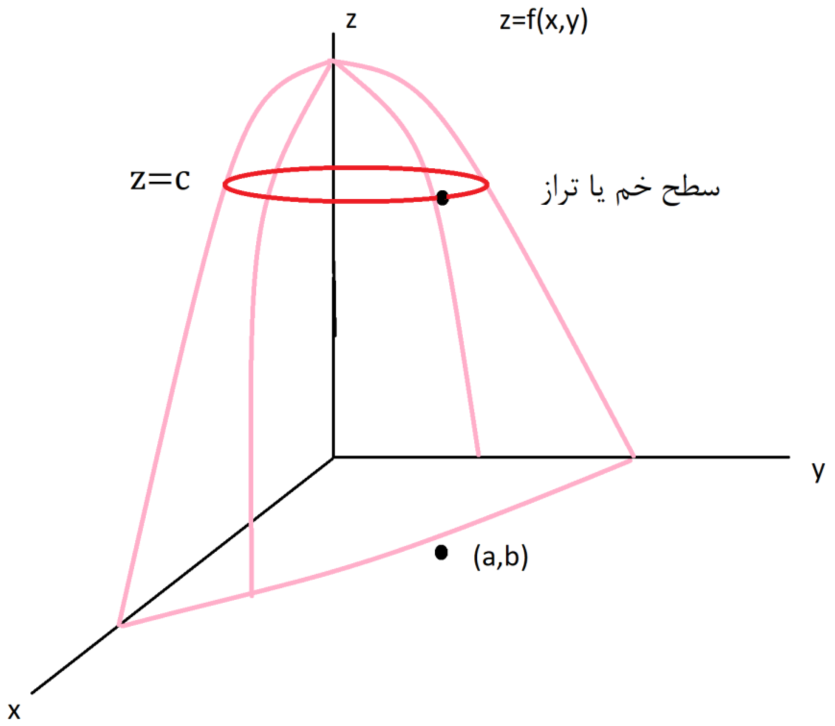
جهت بیشترین صعود

- در راستای ∇f
- ∇f و $\mathbf{p}$ هم‌جهت

گرادیان و مشتق جهت‌دار

∇f همیشه عمود بر تراز

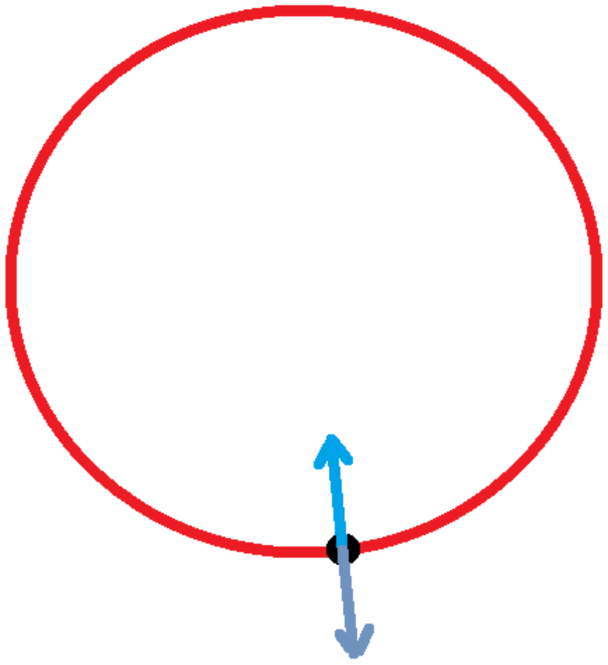
- بردار گرادیان دو بعدی است



گرادیان و مشتق جهت‌دار

∇f همیشه عمود بر تراز

- بردار گرادیان دو بعدی است

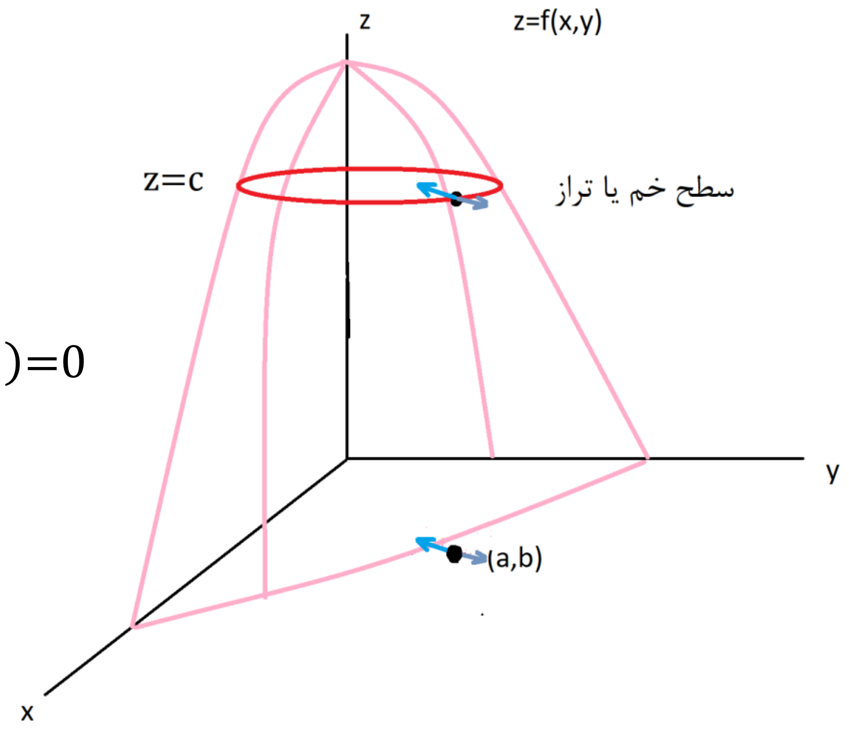


گرادیان و مشتق جهت‌دار

∇f همیشه عمود بر تراز

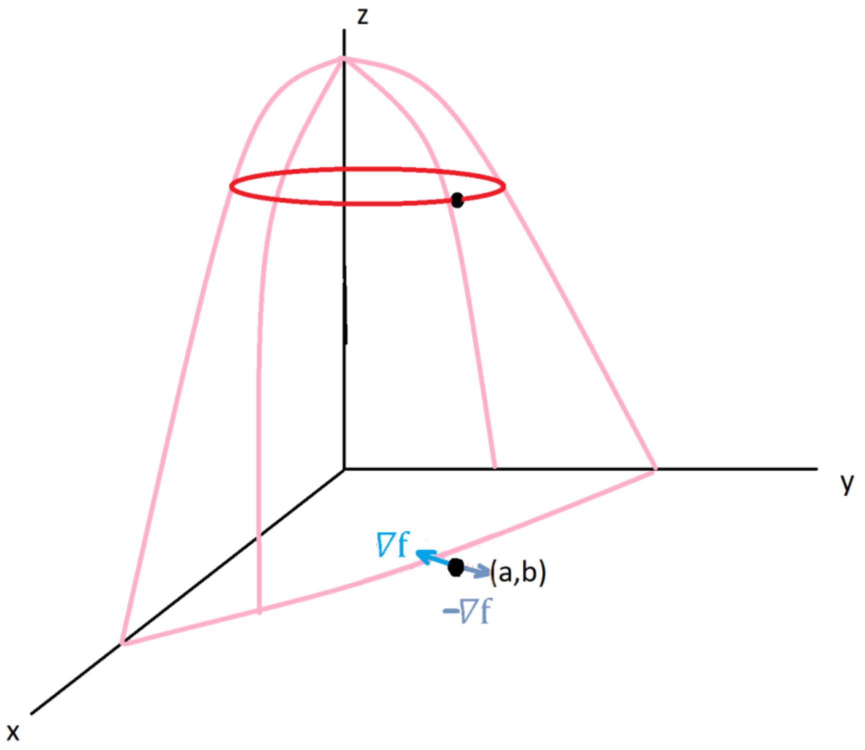
- بردار گرادیان دو بعدی است

- $\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},0)$
- $z = c \xRightarrow{\text{مشتق}} (0,0,۱)$
- $\Rightarrow (\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},0).\,(0,0,۱)=0$



گرادیان و مشتق جهت‌دار

بیش سرعت نزول: $-\nabla f$



منابع

[داایزنروث]

[انازه‌دل]

Rhonda Hughes